

Modelos Físicos Empleados: Informe Detallado

Equipo de Desarrollo

March 10, 2025

1 Introducción

En este documento se recogen los fundamentos físicos y las fórmulas clave que se han empleado en las distintas partes de nuestro proyecto de simulación. Cubriremos aspectos como la autoinductancia de espiras, el cálculo de inductancia total en una bobina, la resistencia en cobre, la fuerza de rozamiento aerodinámico, la dinámica de proyectiles (con y sin rozamiento) y el cómputo de energía mecánica.

2 Bobina e Inductancias

2.1 Autoinductancia de una espira

La autoinductancia de un anillo de radio r se calcula mediante una fórmula aproximada:

$$L_{\text{loop}} \approx \mu_0 r \left[\ln\left(\frac{8r}{a_{\text{eff}}}\right) - 2 \right], \quad (1)$$

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ y a_{eff} es el radio efectivo que toma en cuenta el grosor del conductor.

2.2 Inductancia mutua entre dos espiras coaxiales

Para dos espiras coaxiales de radios r_1 y r_2 , separadas una distancia axial z , se emplean integrales elípticas completas de primera (K) y segunda especie (E). La inductancia mutua M se expresa:

$$M = \mu_0 \sqrt{r_1 r_2} \frac{(2 - k) K(k^2) - 2 E(k^2)}{k}, \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{4 r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + z^2}. \quad (2)$$

2.3 Inductancia total de la bobina

El total se obtiene sumando la autoinductancia de cada espira y la mutua entre pares:

$$L_{\text{total}} = \sum_i L_{\text{espira},i} + 2 \sum_{i < j} M_{ij}. \quad (3)$$

Esta aproximación es de orden $O(N^2)$ al considerar todos los pares de espiras.

2.4 Resistencia en el bobinado de cobre

La longitud total del hilo, ℓ_{total} , se calcula como la suma de las circunferencias de cada espira. Luego:

$$R = \rho_{\text{Cu}} \frac{\ell_{\text{total}}}{A}, \quad \text{con} \quad A = \pi r_{\text{hilo}}^2, \quad (4)$$

donde $\rho_{\text{Cu}} \approx 1.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

3 Rozamiento Aerodinámico: Coeficiente b

Para simplificar el arrastre, se ha empleado un modelo lineal, $F_{\text{drag}} = -b \vec{v}$. El coeficiente b se relaciona con la forma tradicional de arrastre $\frac{1}{2}\rho C_D A v^2$ a través de

$$b = 0.5 \rho C_D A, \quad (5)$$

donde ρ es la densidad del aire, C_D el coeficiente de forma (depende de la geometría) y A el área frontal.

4 Dinámica del Proyectoil

4.1 Caso sin rozamiento

El movimiento se reduce a un tiro parabólico clásico:

$$a_x = 0, \quad v_x = \text{cte}, \quad (6)$$

$$a_y = -g, \quad v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - g \Delta t. \quad (7)$$

La posición se actualiza integrando $x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t$, y análogamente para y .

4.2 Caso con rozamiento lineal

Incluimos la fuerza $F_{\text{drag}} = -b \vec{v}$, por lo que:

$$m a_x = -b v_x \implies a_x = -\frac{b}{m} v_x, \quad (8)$$

$$m a_y = -m g - b v_y \implies a_y = -g - \frac{b}{m} v_y. \quad (9)$$

Luego se integra numéricamente (método de Euler) en pequeños pasos de tiempo Δt .

5 Energía Mecánica

En todo momento podemos calcular:

$$E_c = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2), \quad (10)$$

$$E_p = m g y, \quad \text{si } y \geq 0, \quad (11)$$

$$E_{\text{total}} = E_c + E_p. \quad (12)$$

El arrastre disipa energía, de modo que E_{total} no permanece constante si $b \neq 0$.

6 Conclusión

Hemos revisado los principales modelos físicos que sustentan cada parte del proyecto: el diseño de la bobina (inductancia y resistencia), el rozamiento aerodinámico y la dinámica de un proyectil con o sin rozamiento. Estas ecuaciones y supuestos constituyen la base para la simulación y los cálculos de energías, alcance, y optimización del ángulo.